

Grafos e Algoritmos
Prof. Raimundo Macêdo

Teorema de Hall

Antes do Teorema de Hall, alguns conceitos importantes ...

Um par de conjuntos de vértices (X, Y) é uma **Bipartição** de um grafo G se

- i) $V(G) = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$
- ii) Cada aresta de G tem um extremo em X e o outro em Y

Um grafo é **biparticionável** ou **bipartido** se tiver um bipartição

Um grafo **bipartido completo** tem uma bipartição (X, Y) na qual cada vértice de X é ligado a cada vértice de Y . Se $m = |X|$ e $n = |Y|$, denotamos $K_{m,n}$

Emparelhamento

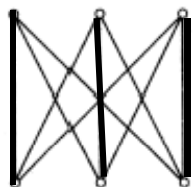
Bipartição onde as arestas são duas a duas não adjacentes

Teorema de Hall

Um grafo G com bipartição $\{P, N\}$ tem um

emparelhamento em G que cobre N sse $|adj(X)| \geq |X|$ para cada subconjunto X de N .

Exemplos e contra-exemplos



Fazer no quadro-negro

5.1 MATCHINGS

A subset M of E is called a *matching* in G if its elements are links and no two are adjacent in G ; the two ends of an edge in M are said to be *matched under M* . A matching M *saturates* a vertex v , and v is said to be *M -saturated*, if some edge of M is incident with v ; otherwise, v is *M -unsaturated*. If every vertex of G is M -saturated, the matching M is *perfect*. M is a *maximum matching* if G has no matching M' with $|M'| > |M|$; clearly, every perfect matching is maximum. Maximum and perfect matchings in graphs are indicated in figure 5.1.

Let M be a matching in G . An *M -alternating path* in G is a path whose edges are alternately in $E \setminus M$ and M . For example, the path $v_5 v_8 v_1 v_7 v_6$ in the graph of figure 5.1a is an M -alternating path. An *M -augmenting path* is an M -alternating path whose origin and terminus are M -unsaturated.

5.1 MATCHINGS

A subset M of E is called a *matching* in G if its elements are links and no two are adjacent in G ; the two ends of an edge in M are said to be *matched under M* . A matching M *saturates* a vertex v , and v is said to be *M -saturated*, if some edge of M is incident with v ; otherwise, v is *M -unsaturated*. If every vertex of G is M -saturated, the matching M is *perfect*. M is a *maximum matching* if G has no matching M' with $|M'| > |M|$; clearly, every perfect matching is maximum. Maximum and perfect matchings in graphs are indicated in figure 5.1.

Let M be a matching in G . An *M -alternating path in G* is a path whose edges are alternately in $E \setminus M$ and M . For example, the path $v_5 v_8 v_1 v_7 v_6$ in the graph of figure 5.1a is an M -alternating path. An *M -augmenting path* is an M -alternating path whose origin and terminus are M -unsaturated.

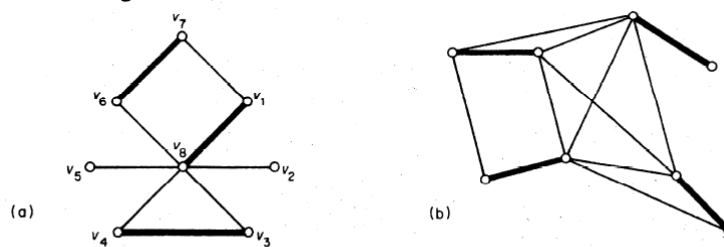


Figure 5.1. (a) A maximum matching; (b) a perfect matching

Theorem 5.1 (Berge, 1957) A matching M in G is a maximum matching if and only if G contains no M -augmenting path.

Proof Let M be a matching in G , and suppose that G contains an M -augmenting path $v_0 v_1 \dots v_{2m+1}$. Define $M' \subseteq E$ by

$$M' = (M \setminus \{v_1 v_2, v_3 v_4, \dots, v_{2m-1} v_{2m}\}) \cup \{v_0 v_1, v_2 v_3, \dots, v_{2m} v_{2m+1}\}$$

Then M' is a matching in G , and $|M'| = |M| + 1$. Thus M is not a maximum matching.

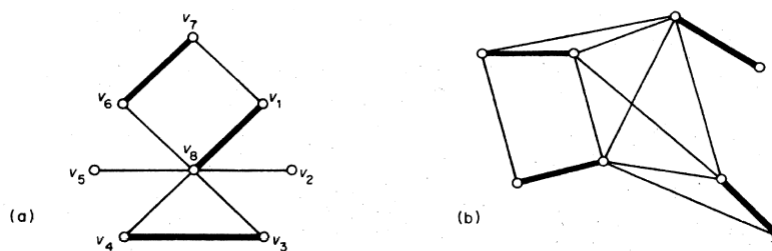
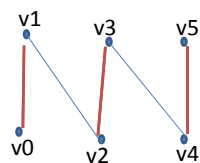


Figure 5.1. (a) A maximum matching; (b) a perfect matching

Pergunta: por que $M' = (M \setminus \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2m-1}v_{2m}\}) \cup \{v_0v_1, v_2v_3, \dots, v_{2m}v_{2m+1}\}$?
 Não seria suficiente $M' = \{v_0v_1, v_2v_3, \dots, v_{2m}v_{2m+1}\}$?



Resposta: considere um grafo com várias componentes ou um emparelhamento que cobre apenas uma pequena parte do grafo!!!!

O que é diferença simétrica?

Para dois grafos G e H , a diferença simétrica $G \triangle H$ é o subgrafo de $G \cup H$ cujas arestas são as arestas de $G \cup H$ aparecendo ou exclusivamente em G

10

ou exclusivamente em H . Também usamos essa notação para conjuntos de arestas; em particular, se M e M' são emparelhamentos, então $M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$.

Ou ainda, $M \triangle M' = \{M \cup M'\} - \{M \cap M'\}$

Theorem 5.1 (Berge, 1957) A matching M in G is a maximum matching if and only if G contains no M -augmenting path.

Nessa parte prova-se $\Leftarrow$ ou o somente se ou only IF. Ou seja, G contains no M -augmenting path $\Rightarrow M$ is maximum

($A \Rightarrow B$)

Assume A e nega B (prova por contradição)

Conversely, suppose that M is not a maximum matching, and let M' be a maximum matching in G . Then

$$|M'| > |M| \quad (5.1)$$

Set $H = G[M \Delta M']$, where $M \Delta M'$ denotes the symmetric difference of M and M' (see figure 5.2).

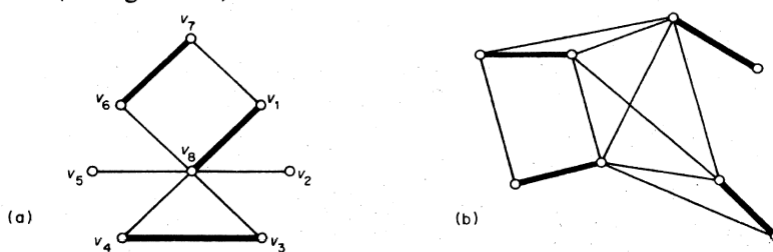


Figure 5.1. (a) A maximum matching; (b) a perfect matching

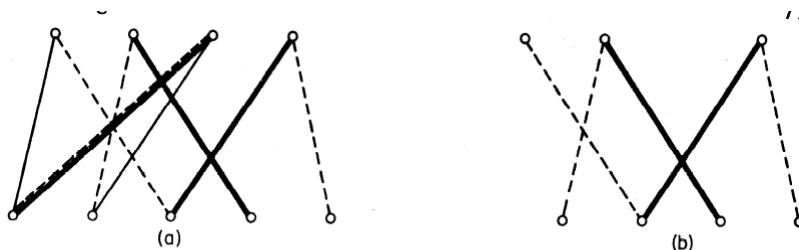


Figure 5.2. (a) G , with M heavy and M' broken; (b) $G[M \Delta M']$

Each vertex of H has degree either one or two in H , since it can be incident with at most one edge of M and one edge of M' . Thus each component of H is either an even cycle with edges alternately in M and M' , or else a path with edges alternately in M and M' . By (5.1), H contains more edges of M' than of M , and therefore some path component P of H must start and end with edges of M' . The origin and terminus of P , being M' -saturated in H , are M -unsaturated in G . Thus P is an M -augmenting path in G $\square$

Teorema de Hall

Do livro: J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, MacMillan, London, 1976.

Theorem 5.2 Let G be a bipartite graph with bipartition (X, Y) . Then G contains a matching that saturates every vertex in X if and only if

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{for all } S \subseteq X \quad (5.2)$$

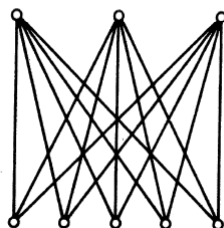
Prova: Lemas 1 e 2

Lema 1 : A condição de Hall é necessária

contains a matching that saturates every vertex in X

$$\Rightarrow |N(S)| \geq |S| \quad \text{for all } S \subseteq X \quad (5.2)$$

Proof Suppose that G contains a matching M which saturates every vertex in X , and let S be a subset of X . Since the vertices in S are matched under M with distinct vertices in $N(S)$, we clearly have $|N(S)| \geq |S|$.



Lema 2 (a condição de hall é suficiente)

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{for all } S \subseteq X$$

(5.2)



contains a matching that saturates every vertex in X

Prova por contradição:

Conversely, suppose that G is a bipartite graph satisfying (5.2), but that G contains no matching saturating all the vertices in X . We shall obtain a contradiction.

Let M^* be a maximum matching in G . By our supposition, M^* does not saturate all vertices in X . Let u be an M^* -unsaturated vertex in X , and let Z denote the set of all vertices connected to u by M^* -alternating paths. Since M^* is a maximum matching, it follows from theorem 5.1 that u is the only M^* -unsaturated vertex in Z . Set $S = Z \cap X$ and $T = Z \cap Y$ (see figure 5.3).

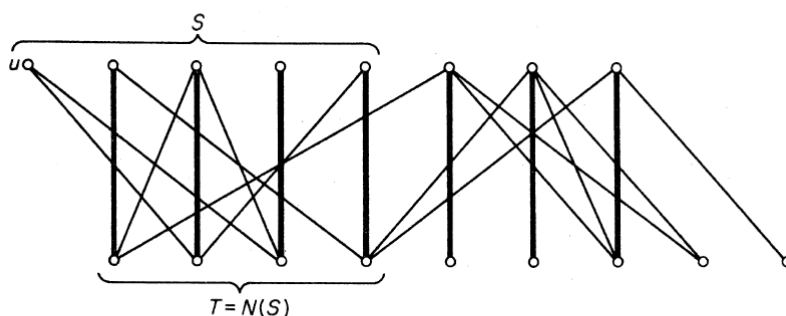


Figure 5.3

Clearly, the vertices in $S \setminus \{u\}$ are matched under M^* with the vertices in T . Therefore

Veja que u faz parte de S , portanto ...

$$|T| = |S| - 1 \quad (5.3)$$

and $N(S) \supseteq T$. In fact, we have

$$N(S) = T \quad (5.4)$$

Veja que S inclui u e portanto tem mais adjacentes que T

De 5.3 e 5.4, temos que $|N(S)| = |S| - 1 < |S|$ ----- contradição

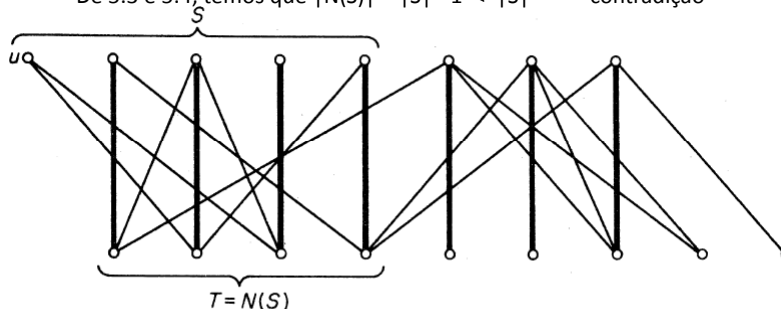


Figure 5.3

Theorem 5.2 Let G be a bipartite graph with bipartition (X, Y) . Then G contains a matching that saturates every vertex in X if and only if

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{for all } S \subseteq X \quad (5.2)$$

Prova da suficiencia da condição de Hall

(5.2) $\Rightarrow$ existe emparelhamento que cobre X
Assuma que (5.2) é verdadeiro

PROVA POR INDUÇÃO no tamanho de X , $|X|$
Seja $n = |X|$

Base de Indução: $|X| = 1$

Hipótese de Indução: verdade para todos os tamanhos de z , $1 < z < n$

Provo para $z = n$

Theorem 5.2 Let G be a bipartite graph with bipartition (X, Y) . Then G contains a matching that saturates every vertex in X if and only if

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{for all } S \subseteq X \quad (5.2)$$

Prova da suficiencia da condição de Hall

(5.2) $\rightarrow$ existe emparelhamento que cobre X

PROVA POR INDUÇÃO no número de arestas

Assuma que (5.2) é verdadeiro

Hipótese de Indução

Suponha que (5.2) vale para todo G' com bipartição (X', Y') , $|X'| < |X|$.

Base de indução.

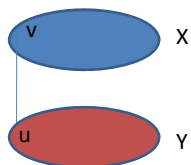
Considere um G' sem arestas

Portanto, $N(X') = \emptyset$ e como assumimos (5.2) $\rightarrow X' = \emptyset$

O emparelhamento vazio $T = \{\}$ cobre X'

Passo indutivo

Assuma que existe pelo menos 1 aresta em G' , com extremos v em X e u em Y



Seja L o grafo $= G - \{u, v\}$. Onde $X' = X \setminus \{v\}$ e $Y' = Y \setminus \{u\}$

Note que $(Y' \setminus \{u\}, X' \setminus \{v\})$ é uma bipartição de L

2 casos a analisar

1o caso: $|N(S)| \geq |S|$ for all $S \subseteq X'$ (5.2)

Então, por hipótese de indução existe emparelhamento que cobre X

Como por hipótese de indução existe emparelhamento T que cobre $X' = X \setminus \{v\}$

Então, o emparelhamento $\{T + \{v, u\}\}$ cobre X em G

2o caso : a condição de Hall não se é verdade em L

Ou seja, $X' \setminus \{v\}$ tem um sub-conjunto S t.q. $|N(S)| < |S|$. (i)

Por hipótese do Lema e considerando G ,

$$|N(S)| \geq |S| \text{ for all } S \subseteq X' \quad (\text{ii})$$

Observe que u é único vértice que foi retirado da partição Y . Ou seja, $Y = Y' + \{u\}$
Pela definição de L , portanto, $N(S)$ está contido ou se iguala a $\{u\} + N(S)$ (ii)

De (i) e (ii) temos que $|N(S)| = |S|$ e u pertence a $N(S)$

$H = G[S + N(S)]$
 $K = G - VH$

Note que $\{S, N(S)\}$ é bipartição de H e que $\{X \setminus S, Y \setminus N(S)\}$ é bipartição de K

Note tb que $|N(S)| < |S|$ e S é sub-conjunto de $X \setminus \{v\}$, então S não é nem vazio nem X . Portanto, $|VH|$ e $|VK|$ são ambos menores do que $|V|$ (ou seja podemos utilizar a hipótese de indução em ambos, H e K).

Basta provar então que $|NH(Z)|$ maior ou igual a $|Z|$ para todo subconjunto Z de S

E $|NK(Z)|$ maior ou igual a $|Z|$ para todo sub-conjunto Z de $X \setminus S$

Por indução, H e K tem emp TH e TK que cobrem S e $N \setminus S$ Portanto, $TH + TK$ é um emp em G que cobre X .

Para provar que $|NH(Z)| \geq |Z|$ para todo subconjunto Z de S

Note que se Z é sub-conjunto de S , então $NH(Z) = N(Z)$ por definição de H (i.e., H inclui todos $N(S)$)

E $N(Z) \geq Z$ por hipótese inicial do lema (i.e., C.H. Vale p/ G)

Para mostrar que $|NK(Z)| \geq |Z|$ para todo sub-conjunto Z de $X \setminus S$

Note inicialmente que $NK(Z) = N(Z+S) \setminus N(S)$ por definição de K

Portanto,

$$|NK(Z)| = |N(Z+S)| - |N(S)|$$

Por hipótese, $|N(Z+S)| \geq |Z+S| = |Z| + |S|$ (já que Z e S são disjuntos); i.e., $|N(Z+S)| \geq |Z| + |S|$. logo

$$|NK(Z)| \geq |Z| + |S| - |N(S)|. \quad \text{Como } |S| = |N(S)|, \text{ então } |NK(Z)| \geq |Z|$$

```

Hall(G,X,Y)
se qG é vazio então
    se X é vazio devolve sim, {}
    senão devolve não, {X}

{escolha aresta de G} u extremo Y e v extremo em X
{remove aresta} L = G\{u,v}

{recursao em L} satisfaz, t = Hall(L,X\{v},Y\{u});
se satisfaz devolva sim, t + {u,v}

S = t;
Se |N(S)| ≠ |S|, devolva não., S

Controi H = G[S+N(S)] (*|N(S)| ≠ |S|*)

{recursao H} satisfaz, t = Hall(H,S,N(S))
Se não satisfaz então devolva não, t
    senão devolva th = t

K= G - VH
{recursao K} satisfaz, t = Hall(K,X\S, Y\N(S));
se não satisfaz então devolva não, t
    senão devolva sim, tH + t

FI

```

Complexidade ??

Se todas os sub-conjuntos S de vértices fossem testados teríamos testar a C.H. 2^n possibilidades

Corolário do Teorema de Hall

Se G é um grafo bipartido k-regular, $k > 0$, G tem um emparelhamento perfeito.

Prova.

Assuma G k-regular com partições X e Y

Já que G é k-regular, $k \cdot |X| = k \cdot |Y| = E$. Since $k > 0$, $|X| = |Y|$

Seja S um sub-conjunto de X e E1 e E2 os sub-conjuntos de arestas incidentes em S e N(S), respectivamente

Por definição de N(S), E1 está contido ou é igual a E2, e, portanto

$$k \cdot |N(S)| = |E2| \geq |E1| = k \cdot |S|$$

Segue que $|N(S)| \geq |S|$ para todo S, já que S foi escolhido de forma geral e o teorema de hall garante portanto que existe emp para X. Como $|X| = |Y|$, o emp tb cobre Y. Comentar sobre o problema do casamento, rapazes e moças.