

Algoritmos e Grafos

Raimundo Macêdo
LaSiD/DCC/UFBA

Grafo Completo

Grafo simples cujos vértices são dois a dois adjacentes.

Usa-se a notação K_n para um grafo completo com n vértices

Um n -cubo, $n \geq 1$, é um grafo simples cujos vértices são as n -uplas ordenadas sobre o conjunto $\{0,1\}$ e no qual dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma coordenada. Ex: (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111)

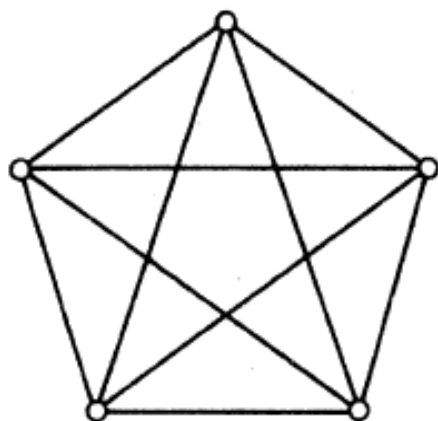
Grafos Complementares

G e H são complementares se ambos são simples, com $V(G) = V(H)$, de modo
Quaisquer dois vértices distintos são adjacentes em G se e somente se não o foram em H

Um par de conjuntos de vértices (X,Y) é uma **Bipartição** de um grafo G se

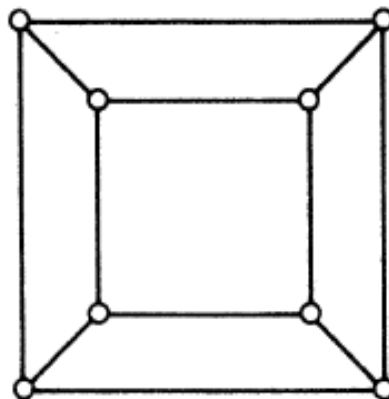
- i) $V(G) = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$
- ii) Cada aresta de G tem um extremo em X e o outro em Y

Um grafo é **biparticionável** ou **bipartide** se tiver um bipartição



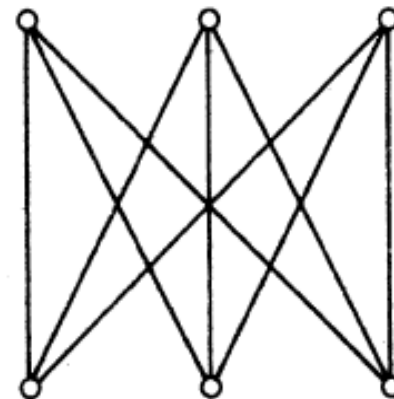
(a)

Completo K_5



(b)

3-cubo



(c)

$K_{3,3}$

Figure 1.4. (a) K_5 ; (b) the cube; (c) $K_{3,3}$

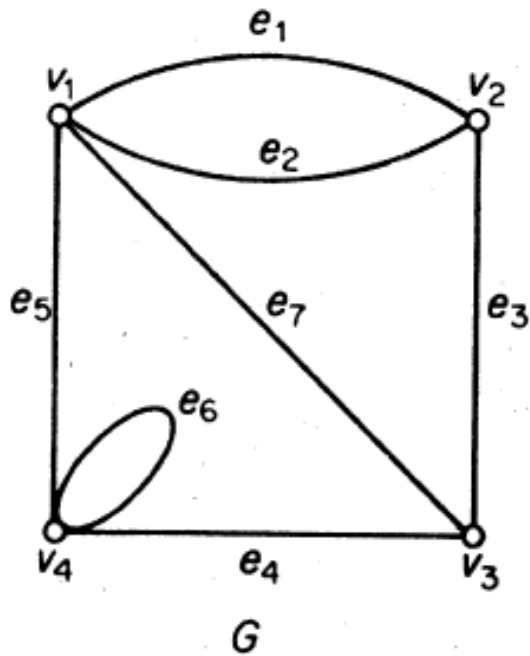
Um grafo **bipartide completo** tem uma bipartição (X,Y) na qual cada vértice de X é ligado a cada vértice de Y . Se $m = |X|$ e $n = |Y|$, denotamos $K_{m,n}$

Exercício sala:

1. Mostre que o grafo da fig (b) acima é bipartide
2. Por que esse grafo não é um $K_{3,3}$?

Estruturas de Dados para representar Grafos

Formas de representar $V(G)$, $E(G)$ e a função de incidência



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

$M(G)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	1	0	1	1

$A(G)$

Matriz de Incidência

Número de vezes (0, 1 ou 2)
 v_i e a_j são incidentes

Matriz de Adjacência

Número de arestas
juntando dois vértices

Exercício sala:

1. Qual das duas representações é mais compacta?
2. Qual das duas representações melhor expressa um grafo?
3. Seja M e A as matrizes de incidência e adjacência de um grafo, G , respectivamente.
 - i. Mostre que a soma de cada coluna de M é 2
 - ii. Qual são as somas das colunas de A ?
4. Seja G um grafo bipartido, mostre que os vértices de G podem ser enumerados de modo que a matriz de adjacência de G tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Outras representações

Pode-se também utilizar Vetor de Vértices Incidências, onde a j -ésima posição é um par (u,v) onde u e v são os extremos da aresta j

Pode-se usar também Vetor de Arestas Incidentes onde a j -ésima posição é a lista de arestas incidentes ao vértice j

SUBGRAFOS E SUB-GRAFOS GERADORES (SPANNING)

Um grafo H é um subgrafo de outro grafo G ($H \subseteq G$) se $V(G)$ inclui $V(H)$, $E(G)$ inclui $E(H)$ e para toda aresta de H , seus extremos em H são também Seus extremos em G .

Quando $H \subseteq G$, mas $H \neq G$, escrevemos $H \subset G$ e dizemos que H é um sub-grafo próprio de G

Um *spanning sub-graph* (sub-grafo gerador) de G é um sub-grafo H de G onde $V(H) = V(G)$

Se removermos de G todos os laços e arestas redundantes, obtemos um sub-grafo simples gerador de G (figura abaixo)

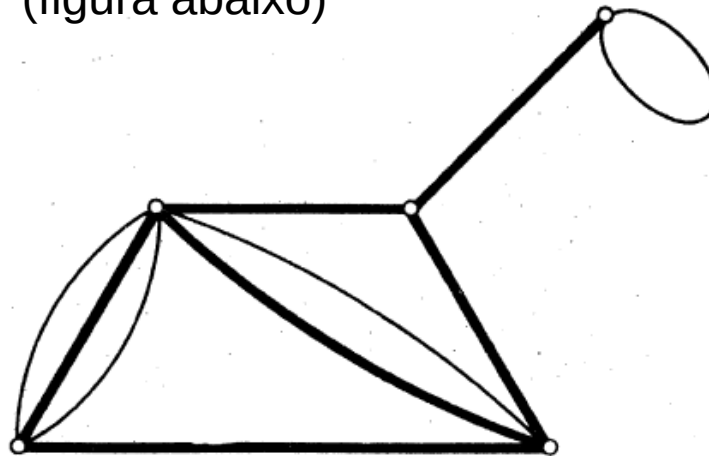


Figure 1.6. A graph and its underlying simple graph

SUBGRAFOS E SUB-GRAFOS GERADORES (SPANNING)

Um *spanning sub-graph* (sub-grafo gerador) de G é um sub-grafo H de G onde $V(H) = V(G)$

1.4 SUBGRAPHS

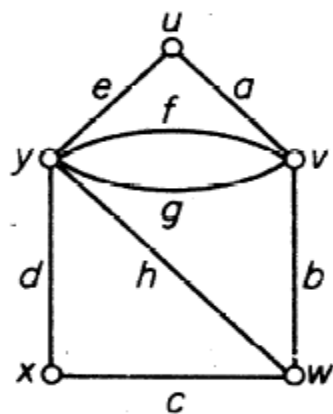
A graph H is a *subgraph* of G (written $H \subseteq G$) if $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, and ψ_H is the restriction of ψ_G to $E(H)$. When $H \subseteq G$ but $H \neq G$, we write $H \subset G$ and call H a *proper subgraph* of G . If H is a subgraph of G , G is a *supergraph* of H . A *spanning subgraph* (or *spanning supergraph*) of G is a subgraph (or supergraph) H with $V(H) = V(G)$.

By deleting from G all loops and, for every pair of adjacent vertices, all but one link joining them, we obtain a simple spanning subgraph of G , called the *underlying simple graph* of G . Figure 1.6 shows a graph and its underlying simple graph.

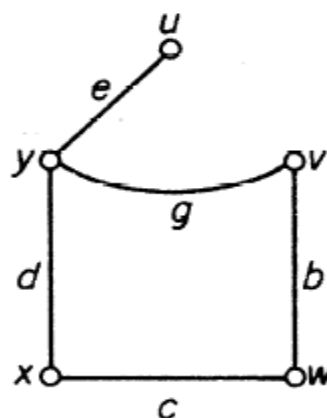
Def. Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo gerador conexo e acíclico de G .

Fato: Todo grafo conexo possui uma árvore geradora. A idéia para verificar isto é ir retirando as arestas uma a uma de modo a manter o grafo conexo. Quando isto não for mais possível, as arestas remanescentes formam uma árvore geradora.

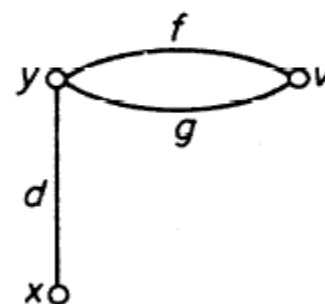
Graphs and Subgraphs



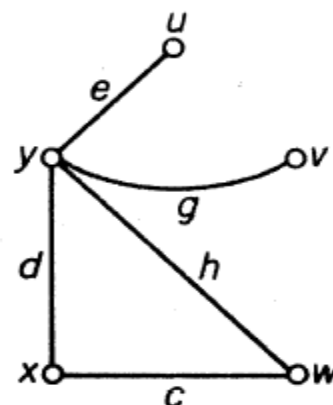
G



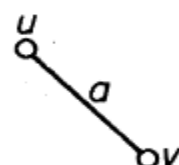
A spanning
subgraph of G



$G - \{u, w\}$

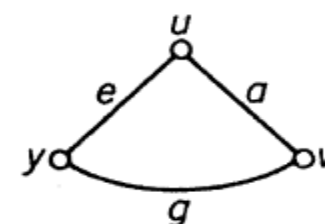


$G - \{a, b, f\}$



x

The induced
subgraph
 $G[\{u, v, x\}]$



x o w

The edge-induced
subgraph
 $G[\{a, c, e, g\}]$

Figure 1.7

Exercício para Casa

Demonstrar:

- 1) Em todo grafo G simples com n vértices ($n > 1$), existem pelo menos dois Vértices com o mesmo número de arestas incidentes
- 2) Para cada número par n , $n > 3$, existe um grafo 3-regular (grau 3 em todos os vértices) com n vértices

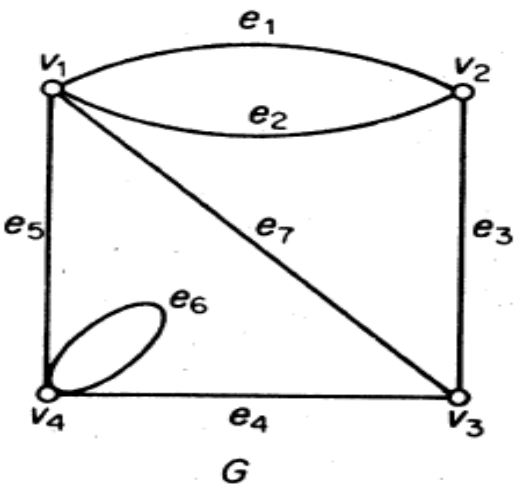
AULA 03

Grau de um Vértice

O grau $d_G(v)$ do vértice v de G é o número de arestas incidentes a v , cada laço sendo contado duas vezes. (d vem de *degree*). Seja $\varepsilon = |E(G)|$

Teorema Básico
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

Prova: considere a matriz de incidência M . O grau de um vértice v , $d(v)$, é a soma dos elementos da linha correspondente a v . Portanto, a soma dos graus de todos os vértices de G corresponde à soma de todos os elementos de M ($\sum d(v)$). De outro lado, cada Coluna de M representa uma aresta que contribui com o valor 2. Portanto, a soma de Todos os elementos de M é também 2ε (fim)



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

$M(G)$

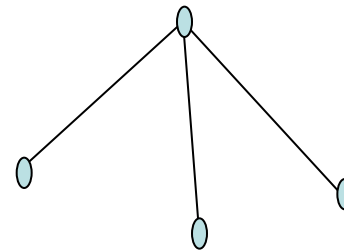
Corolário: em um G qualquer, o número de vértices de G com grau ímpar é par.

Prova: Seja V_1 e V_2 os conjuntos de vértices de G com grau ímpar e par, respectivamente.

Então: $\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$ é par (pelo teorema básico)

Como $\sum_{v \in V_2} d(v)$ é par, temos que $\sum_{v \in V_1} d(v)$ também é par.

Portanto, $|V_1|$ é par.



Grafo k-regular

Um grafo G é k -regular se $d(v) = k, \forall v \in V(G)$.

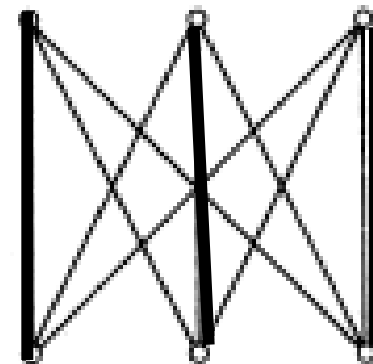
Exemplos de grafos k -regulares: Grafo completo, bipartido completo e k -cubos.

Emparelhamento

Bipartição onde as arestas são duas a duas não adjacentes

Teorema de Hall (provar em casa)

Um grafo G com bipartição $\{P, N\}$ tem um emparelhamento em G que cobre N sse $|\text{adj}(X)| \geq |X|$ para cada subconjunto X de N .



Demonstrações sugeridas na aula 02:

Teorema 1. Em todo grafo G simples com n vértices ($n > 1$), existem pelo menos dois vértices com o mesmo número de arestas incidentes

Prova:

Dado que G é simples, $\forall v \in V(G)$, $0 \leq d(v) \leq n-1$ (trivial verificar)

Há, portanto, n valores distintos para graus.

Contudo:

$\exists v \text{ tq } d(v) = 0 \rightarrow \exists v \text{ tq } d(v) = n-1$

Ou $\exists v \text{ tq } d(v) = n-1 \rightarrow \exists v \text{ tq } d(v) = 0$

Logo, $\exists v \text{ tq } d(v) = 0$ e $\exists v \text{ tq } d(v) = n-1$ são mutuamente exclusivos.

Suponha pois, sem perda de generalidade, que $\exists v \in V(G)$ tq $d(v) = 0$.

Dado que temos, portanto, $d(v) : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$, existirão pelo menos 2 vértices com o mesmo grau

Demonstrações:

Teorema 2. Para cada número **par** n , $n > 3$, existe um grafo 3-regular com n vértices.

Prova por Construção:

Construiremos o grafo 3-regular G , da seguinte forma:

$$V = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$E = E_{\text{cir}} \cup E_{\text{emp}}$, onde as arestas de E_{cir} definem um circuito e as arestas de E_{emp} definem um emparelhamento, construídas conforme abaixo.

$$E_{\text{cir}} = \{(i, i+1) \text{ para } 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{(n-1, 0)\}$$

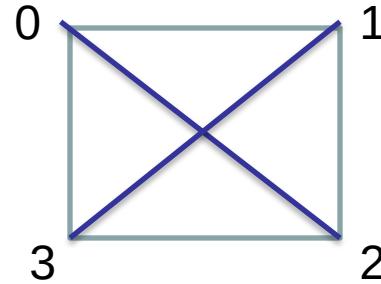
$$E_{\text{emp}} = \{(i, i + n/2) \text{ para } 0 \leq i \leq n/2 - 1\}$$

As arestas do circuito contribuem com 2 graus em cada vértice e as arestas do emparelhamento com 1 grau em cada vértice.

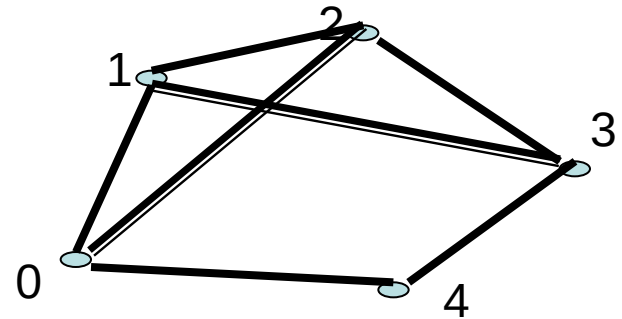
Exemplo. Considere $V = \{0,1,2,3\}$

$E_{\text{Circ}} = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0)\}$

$E_{\text{Emp}} = \{(0,2), (1,3)\}$



Não funciona com n impar. Ex. $n = 5$



Passeios, Trilhas, Caminhos e Circuitos

Artigo Interessante: J. Edmonds. Paths, Trees, and Flowers. Canadian Journal of Math. Num.17. 1965.

Passeio (walk)

Um passeio W em G é uma seqüência finita e não vazia $W = (v_0 e_1 v_1 e_2 v_2, \dots, e_k v_k)$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, de modo que as extremidades da aresta e_i são os vértices v_{i-1} e v_i , $1 \leq i \leq k$

Os vértices v_0 e v_k são a origem e o termino do passeio, respectivamente.

Os vértices $v_1, \dots, v_{k-1}$ são ditos internos do passeio que tem **tamanho K**

Para grafos simples, $v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$ é determinado pela seqüência de vértices $v_0 v_1 \dots v_k$

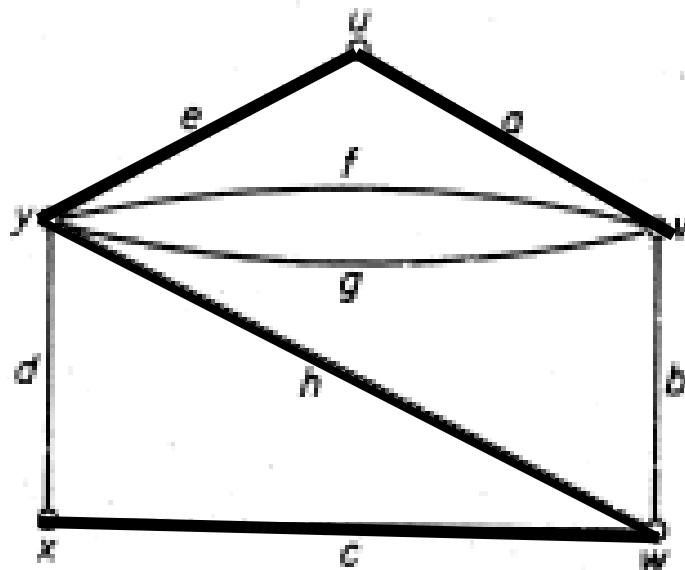
Trilha (Trail)

Passeio onde as arestas $e_1, \dots, e_k$ são duas a duas distintas.

Nesse caso o tamanho de uma trilha = $\varepsilon(W)$, o número de arestas de W .

Caminho (Path)

Quando, além das arestas, os vértices $v_0, v_1, \dots, v_k$, são dois a dois distintos.



Walk: $uavfyfvgyhwbv$

Trail: $wcxdyhw bvg y$

Path: $xcwhy euav$

Ref [1]

Figure 1.8

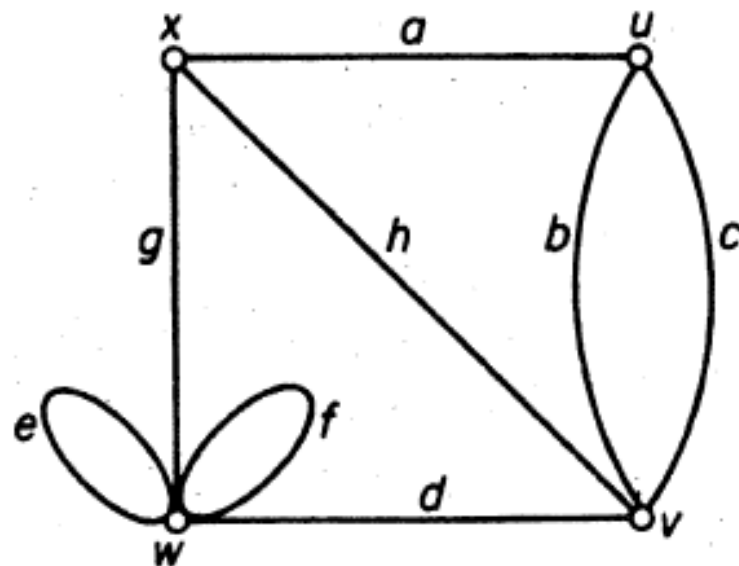
Passeio: $uavfyfvgyhwbv$

Trilha: $wcxdyhw bvg y$

Caminho: $xcwhy euav$

Um passeio não degenerado é fechado se o vértice inicial for igual ao final
 Uma trilha fechada onde os vértices internos são 2 a 2 distintos, chama-se **Circuito**.

Circuito: $xdyhw cx$



Closed trail: $ucvhxgwfdvbu$
 Cycle: $xaubvhx$

Figure 1.10

Exemplo de trilha fechada de circuito (ou ciclo) – ref [1]

Exercício: **Provar o seguinte teorema**

Teorema: G conexo é bipartite sse G não possui circuitos de tamanho impar

Exercício: **Provar o seguinte teorema**

Teorema: G é bipartite sse G não possui circuitos de tamanho ímpar

Demonstração:

1) necessidade: G biparticionável $\rightarrow G$ não tem circuitos ímpar

Seja $v_1, \dots, v_k, v_1$ um ciclo qualquer de comprimento k do grafo biparticionável G e seja $v_1 \in V_1$ (onde V_1 e V_2 são partições de V).

Logo $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$ Como $(v_k, v_1) \in E$ (arestas de G), então $v_k \in V_2$ (senão, não seria biparticionável). Portanto, k é par.

Falta provar a suficiência, i.e., **G não tem circuitos ímpar $\rightarrow G$ é biparticionável.**

Considere V_1 e V_2 construídos da seguinte forma:

Por suposição todo circuito de G é par.

Seja v_1 um vértice qualquer de V e $V_1 = \{\text{conjunto de vértices com distância par de } v_1\}$

$V_2 = V - V_1$

Nota: se houvesse circuito ímpar, pelo menos dois adjacentes estariam na mesma partição

Agora temos V_1 e V_2 , construídos a partir da suposição que todo circuito é par. Observem que por definição V_1 e V_2 incluem todos os vértices de G (conexo)

Vamos provar que de fato V_1 e V_2 foram um grafo bipartido.

Prova por contradição ...

Suponha por absurdo que temos V_1 e V_2 , mas que G não é particionável.

Nesse caso, portanto, ou existe uma aresta $\alpha(a,b)$ in V_1 ou existe uma aresta $\alpha(a,b)$ in V_2 (in=pertence) ou em ambas as partições.

Assumamos que existe uma aresta $\alpha(a,b)$ in V_1

Considere os caminhos mais curtos de v_1 para a e v_1 para b .

Então, por escolha de a e b (in V_1), os caminhos acima são pares.

Se os caminhos $(v_1, \dots, a)$ e $(v_1, \dots, b)$ são disjuntos (exceto pelo vértice v_1), então o circuito $(v_1, \dots, a, \alpha, b, \dots, v_1)$ tem comprimento ímpar (contradição).

Caso haja intersecção de $v_1, \dots, y$, os caminhos disjuntos $(y, \dots, a)$ e $(y, \dots, b)$ terão a mesma paridade (já que os caminhos a partir de v_1 são pares). Portanto, o circuito $(y, \dots, a, \alpha, b, \dots, y)$ tem comprimento ímpar (contradição).

O caso é análogo para uma aresta $\alpha(a,b)$ in V_2 (verifiquem em casa

Segue uma outra prova simples, que é aceitável; (fonte, <http://www.inf.ufpr.br/andre/>)
Em essência, similar a que eu apresentei.

Teorema 1-5: *Um grafo G é bipartite se e somente se todo ciclo de G possuir comprimento par.*

Prova:

Ida: Seja X e Y as duas partições de G . Todo caminho em G alterna um vértice de X com um vértice de Y . Isso é a consequência da definição de grafo bipartite. Supondo que um ciclo contém um vértice v_i em uma das duas partições. Para voltar a esse vértice, é preciso ir na outra partição e voltar um número par de vezes.

Volta: Seja G um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice v_i de G . Colocamos num conjunto X o vértice v_i e todos os outros que são a uma distância par de v_i . Os outros vértices formam o conjunto Y . Se não tivesse nenhuma aresta ligando dois vértices de X ou dois vértices de Y , respeitaríamos as condições para que o grafo seja bipartite. Suponhamos agora que existe uma outra aresta entre dois vértices a e b de X (ou Y). Já temos um caminho par entre a e b . Acrescentando a nova aresta, obteríamos um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto, não pode existir outra aresta entre qualquer par de vértice que já está em X (igualmente par Y) e o grafo é bipartite.

Note que essa prova indica de maneira direta qual seria o algoritmo par determinar se um grafo é bipartite ou não.

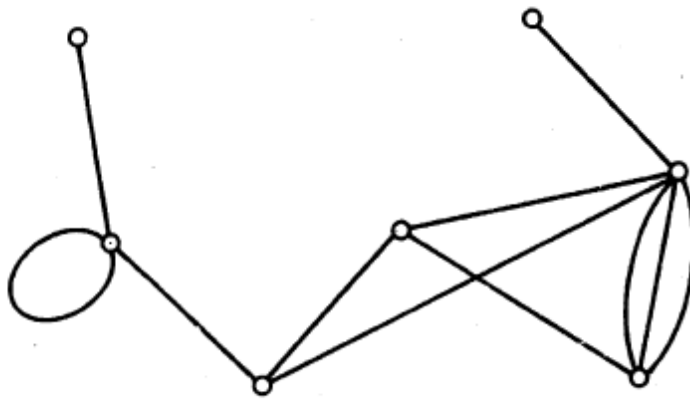
Dois vértices u e v são ditos **conexos** se existe um caminho de u para v .

Um grafo G pode ser particionado em componentes de modo que dois Vértices são conexos se e somente se pertencem ambos ao mesmo componente.

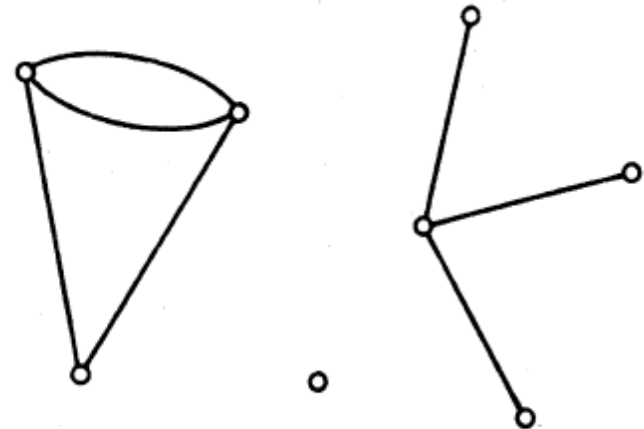
Ou seja, $V = V_1 \cup V_2 \dots \cup V_k$

Os sub-grafos $G[V_1]$, $G[V_2]$... $G[V_k]$ são chamados de componentes de $G(V)$

Se G somente possui 1 componente, G é chamado de **grafo conexo**. Do contrário, G é chamado de **desconexo**.



(a)



(b)

Figure 1.9. (a) A connected graph; (b) a disconnected graph with three components

Distância entre dois vértices u e v

Mínimo dos comprimentos de passeios entre u e v em G (menor caminho).
Se não há passeios entre u e v , a distância é infinita.

Um caminho C num grafo é mínimo se não existe outro caminho com mesma origem e mesmo término que C mas comprimento menor que o de C .
Observe que todo caminho mínimo é simples.

A distância entre vértice s e t num grafo é o comprimento de um caminho mínimo de s a t .

A distância entre s e t é d se e somente se

- (1) existe um caminho de comprimento d entre s e t e
- (2) nenhum caminho entre s e t tem comprimento menor que d .

Diâmetro de G

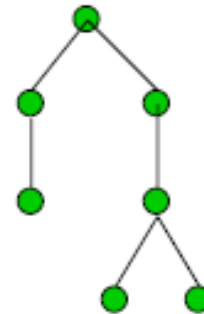
Máximo das distâncias entre vértices de G

Cintura de G

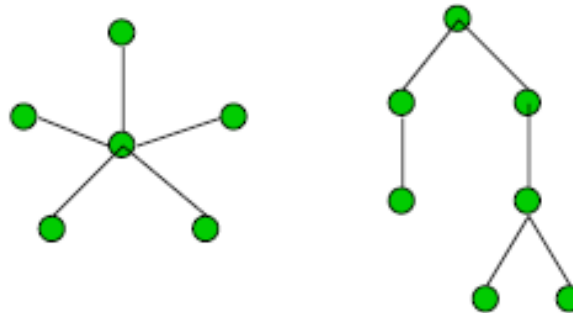
Comprimento do menor circuito de G

Árvores e Florestas

Uma árvore é um grafo conexo acíclico. Ou seja, um grafo conexo que não contém ciclos



Uma floresta é um grafo cujas componentes são árvores



Árvores

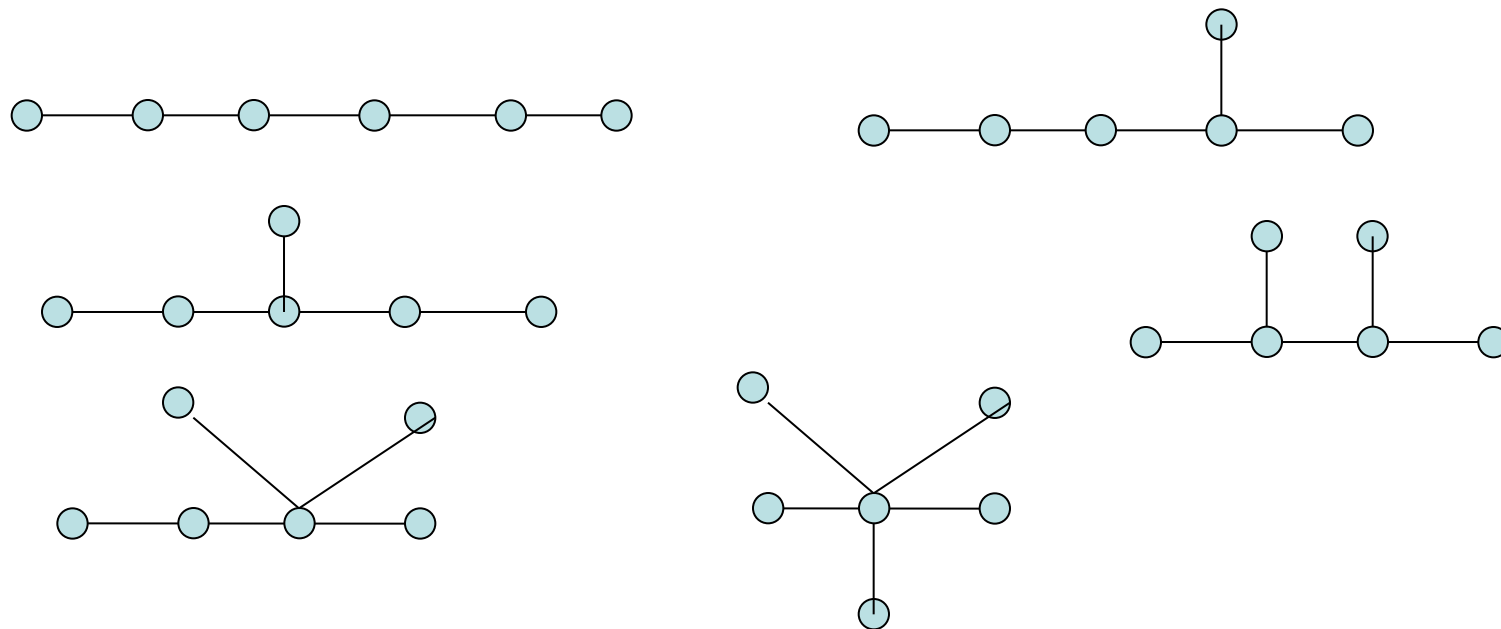
Um grafo sem ciclos é chamado acíclico

Uma árvore $T(V,E)$ é um grafo acíclico e conexo

Seja v um vértice de T . Se grau de $v \leq 1$, v é uma folha; vértice interno T , ao contrário.

Conjunto de árvores = floresta.

Abaixo todas as árvores (não isomorfas) com 6 vértices



Outras propriedades de árvores

Uma árvore T com n vértices tem exatamente $n-1$ arestas

Argumento indutivo para a prova da propriedade

Se $|V| = 1$, obviamente $|E| = 0$

Suponha que T tenha $n-1$ vértices e $n-2$ arestas, $n > 1$

Considere a adição de uma aresta $e = (v,w)$. Como T é conexo, pelo menos um dos vértices de e pertence a T .

Mas como T é acíclico, pelo menos um dos vértices de e não pertence a T (caso, contrário a inclusão de e produziria um ciclo).

Logo, exatamente um dentre v e w pertence a T , o que significa que a árvore passa a possuir n vértices e $n-1$ arestas.

Teorema: G é uma árvore se e somente se existir um único caminho entre cada par de vértices de G .

Prova.

Necessidade:

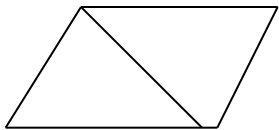
Se G é uma árvore, então G é conexo e portanto existe pelo menos um caminho entre cada par de vértice de G . Suponha que existem dois caminhos distintos $v \rightarrow P_1 \rightarrow w$ e $v \rightarrow P_2 \rightarrow w$ entre v e w . Então $v \rightarrow P_1 \rightarrow w \rightarrow P_2 \rightarrow v$ forma um ciclo, o que contradiz G ser acíclico.

Suficiência

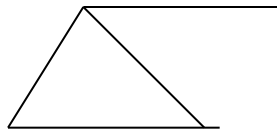
Se existe exatamente um caminho entre cada par de vértices de G , então G é obviamente conexo, e, além disso, não pode conter ciclos. Portanto, G é uma árvore.

Sub-grafo gerador (ou de espalhamento) de $G_1(V_1, E_1)$ é um sub-grafo $G_2(V_2, E_2)$ de G_1 , tal que $V_1 = V_2$.

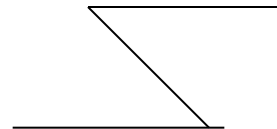
Quando o sub-grafo gerador é uma árvore, recebe o nome de árvore geradora.



grafo



sub-grafo gerador



árvore geradora

Todo grafo G conexo possui uma árvore geradora

Processo construtivo: considere uma aresta e de G . Remover e de G se $G - e$ for conexo.

Quando todas as arestas que permaneceram já tiverem sido consideradas, então o grafo resultante é uma árvore geradora de G .

Árvore Geradora Máxima/Mínima

Seja $G(V,E)$ um grafo conexo, em que cada aresta $e = (v,w)$ possui um peso $d(e)$

Denomina-se peso da árvore geradora $T(V,E_t)$ de G a soma de todos os pesos de arestas de T que forma G .

Ou seja, peso de $T = \sum_{\forall e \in E_t} d(e)$

Problema de otimização: obter a árvore geradora de peso máximo ou obter a árvore geradora de peso mínimo.

Ou seja, obter o sub-conjunto E_t de E , tal que

- (i) (V,E_t) seja uma árvore
- (ii) $\sum d(e)$ seja máximo/mínimo
 $\forall e \in E_t$

Todo grafo G conexo possui uma árvore geradora

Processo construtivo: considere uma aresta e de G . Remover e de G se $G - e$ for conexo.

Quando todas as arestas que permaneceram já tiverem sido consideradas, então o grafo resultante é uma árvore geradora de G .

Árvore Geradora Máxima/Mínima

Seja $G(V,E)$ um grafo conexo, em que cada aresta $e=(v,w)$ possui um peso $d(e)$

Denomina-se peso da árvore geradora $T(V,E_t)$ de G a soma de todos os pesos de arestas de T que forma G .

Ou seja, peso de $T = \sum_{\forall e \in E_t} d(e)$

Problema de otimização: obter a árvore geradora de peso máximo ou obter a árvore geradora de peso mínimo.

Ou seja, obter o sub-conjunto E_t de E , tal que

- (i) (V,E_t) seja uma árvore
- (ii) $\sum d(e)$ seja máximo/mínimo
 $\forall e \in E_t$

Um algoritmo Guloso para obter árvore geradora máxima

Inicialmente E_t = vazio

A cada passo, escolher uma aresta (v,w) ainda não considerada tal que

- (i) A incorporação de (v,w) ao conjunto E_t não produz ciclos
- (ii) O peso total de $E_t \cup \{(v,w)\}$ é máximo, dentre todas as escolhas de arestas que satisfazem (i).

Após a verificação, incorporar (v,w) a E_t e repetir o processo até que todas as arestas tenham sido consideradas.

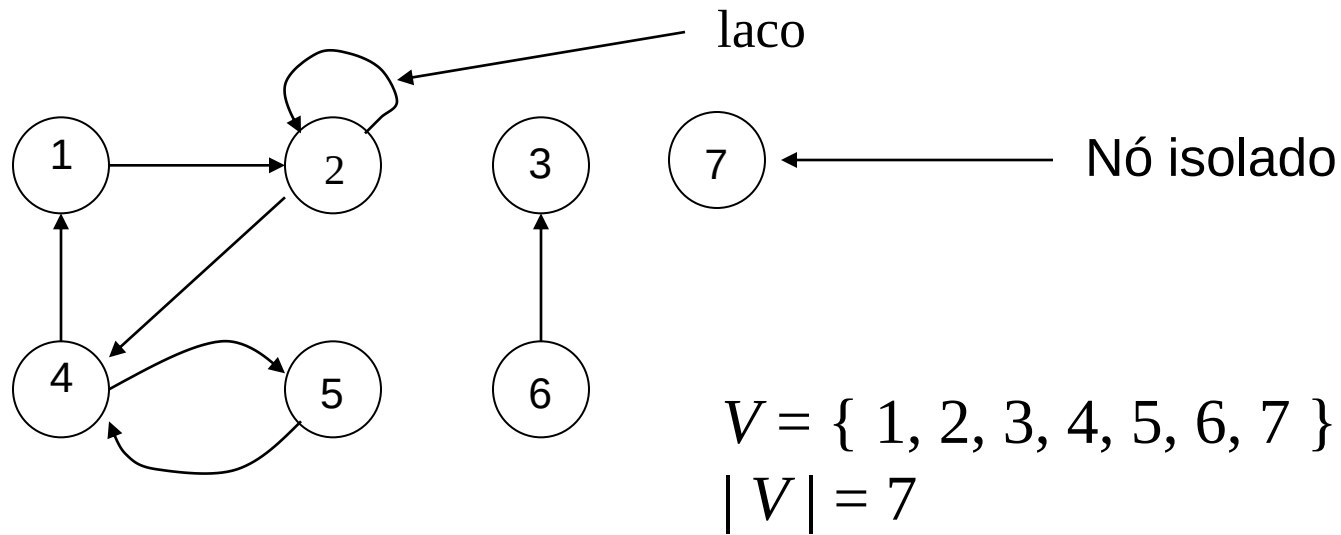
A aresta (v,w) que maximiza o peso $E_t \cup \{(v,w)\}$ é obviamente a aresta de maior peso ainda não considerada.

Ao algoritmos mais utilizados são algoritmos gulosos que rodam em tempo polinomial: algoritmo de Prim e o algoritmo de Kruskal.

O problema de encontrar tais árvores pertence a classe de complexidade P.

Grafos Orientados ou Digrafos (*Directed Graphs* ou *Digraphs*)

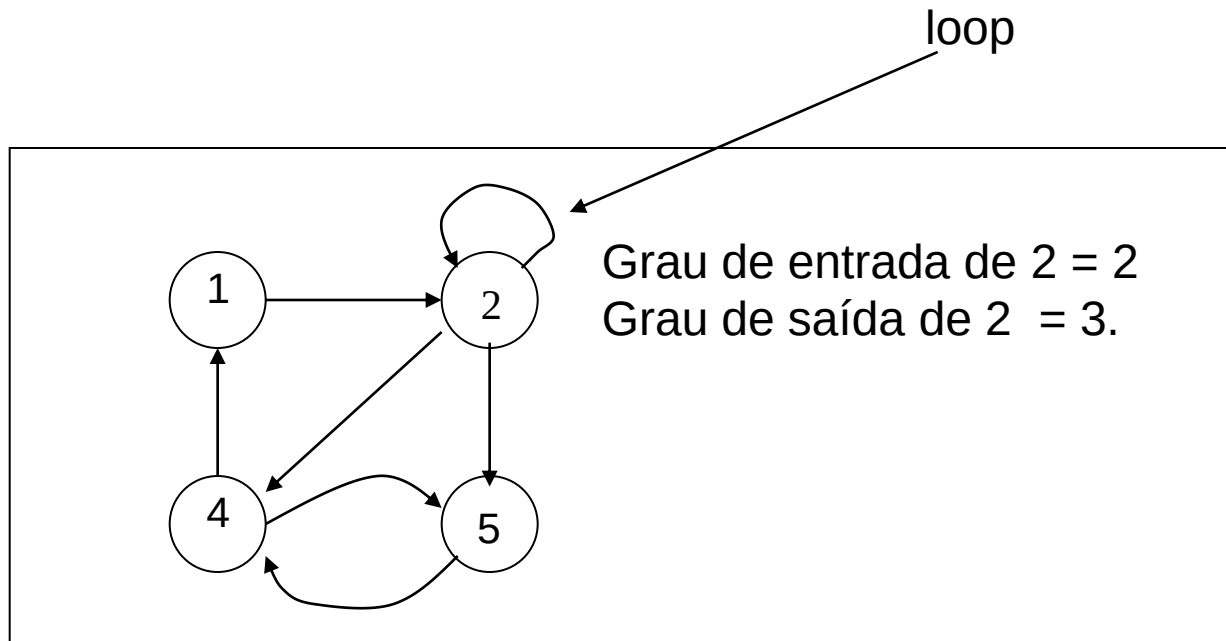
Um dígrafo $D(V,E)$ é um conjunto finito não vazio V de vértices, e um conjunto E de ARCOS, que são pares ordenados de elementos de V .



$$E = \{ (1,2), (2,2), (2,4), (4,5), (4,1), (5,4), (6,3) \}$$
$$|E| = 7$$

Grau de saída = número de arestas de saída

Grau de entrada = número de arestas de entrada



Fácil constatar que:

$$\sum \text{indeg}(v) = \sum \text{outdeg}(v) = |E|$$

Matrizes de adjacência de Grafos Orientados

A matriz de adjacência de um dígrafo tem colunas e linhas indexadas pelos vértices.

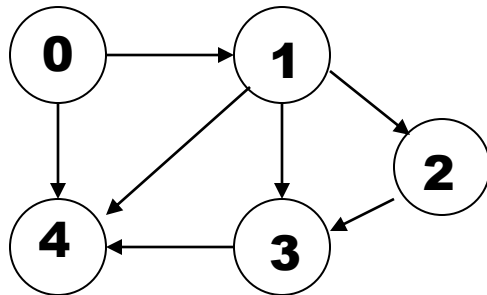
Se adj é uma tal matriz então, para cada vértice v e cada vértice w ,

1. $adj[v][w] = 1$ se $v-w$ é um arco e

2. $adj[v][w] = 0$ em caso contrário.

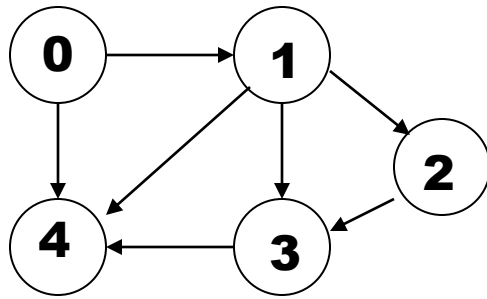
Observe que a matriz de adjacência de um grafo não orientado é simétrica: $adj[v][w] = adj[w][v]$ para todo v e todo w . O mesmo não necessariamente acontece para dígrafos.

Matrix de Adjacência



	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0

Matrix de Adjacência



	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0

Exercício

Seja s um vértice de digrafo G . Para cada vértice x do digrafo, seja $dist(x)$ a distância de s a x em G . Mostre que $dist(w) \leq dist(v) + 1$ para todo arco $v-w$.