

Doutorado em Ciência da Computação

Algoritmos e Grafos

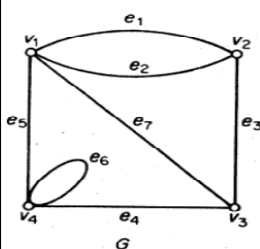
Raimundo Macêdo
LaSiD/DCC/UFBA

Grau de um Vértice

O grau $d_G(v)$ do vértice v de G é o número de arestas incidentes a v , cada laço sendo contado duas vezes. (d vem de *degree*). Seja $\varepsilon = |E(G)|$

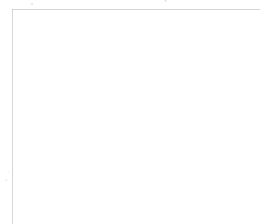
Teorema Básico
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

Prova: considere a matriz de incidência M . O grau de um vértice v , $d(v)$, é a soma dos elementos da linha correspondente a v . Portanto, a soma dos graus de todos os vértices de G corresponde à soma de todos os elementos de M ($\sum d(v)$). De outro lado, cada Coluna de M representa uma aresta que contribui com o valor 2. Portanto, a soma de Todos os elementos de M é também 2ε (fim)



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

$M(G)$



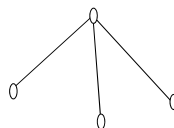
Corolário: em um G qualquer, o número de vértices de G com grau ímpar é par.

Prova: Seja V_1 e V_2 os conjuntos de vértices de G com grau ímpar e par, respectivamente.

Então: $\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$ é par (pelo teorema básico)

Como $\sum_{v \in V_2} d(v)$ é par, temos que $\sum_{v \in V_1} d(v)$ também é par.

Portanto, $|V_1|$ é par.



Grafo k-regular

Um grafo G é k -regular se $d(v) = k, \forall v \in V(G)$.

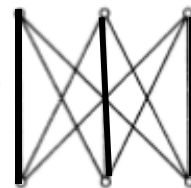
Exemplos de grafos k -regulares: Grafo completo, bipartido completo e k -cubos.

Emparelhamento

Bipartição onde as arestas são duas a duas não adjacentes

Teorema de Hall (provar em casa)

Um grafo G com bipartição $\{P, N\}$ tem um emparelhamento em G que cobre N sse $|adj(X)| \geq |X|$ para cada subconjunto X de N .



Demonstrações sugeridas na aula 02:

Teorema 1. Em todo grafo G simples com n vértices ($n > 1$), existem pelo menos dois vértices com o mesmo número de arestas incidentes

Prova:

Dado que G é simples, $\forall v \in V(G)$, $0 \leq d(v) \leq n-1$ (trivial verificar)

Há, portanto, n valores distintos para graus.

Contudo:

$\exists v \text{ tq } d(v) = 0 \rightarrow \nexists v \text{ tq } d(v) = n-1$

Ou $\exists v \text{ tq } d(v) = n-1 \rightarrow \nexists v \text{ tq } d(v) = 0$

Logo, $\exists v \text{ tq } d(v) = 0$ e $\exists v \text{ tq } d(v) = n-1$ são mutuamente exclusivos.

Suponha pois, sem perda de generalidade, que $\nexists v \in V(G) \text{ tq } d(v) = 0$.

Dado que temos, portanto, $d(v) : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$, existirão pelo menos 2 vértices com o mesmo grau $\square$

Demonstrações:

Teorema 2. Para cada número **par** n , $n > 3$, existe um grafo 3-regular com n vértices.

Prova por Construção:

Construiremos o grafo 3-regular G , da seguinte forma:

$V = \{0, 1, \dots, n-1\}$

$E = E_{\text{cir}} \cup E_{\text{emp}}$, onde as arestas de E_{cir} definem um circuito e as arestas de E_{emp} definem um emparelhamento, construídas conforme abaixo.

$E_{\text{cir}} = \{(i, i+1) \text{ para } 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{(n-1, 0)\}$

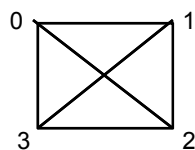
$E_{\text{emp}} = \{(i, i + n/2) \text{ para } 0 \leq i \leq n/2 - 1\}$

As arestas do circuito contribuem com 2 graus em cada vértice e as arestas do emparelhamento com 1 grau em cada vértice.

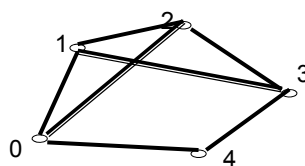
Exemplo. Considere $V = \{0,1,2,3\}$

$E_{\text{Circ}} = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0)\}$

$E_{\text{Emp}} = \{(0,2), (1,3)\}$



Não funciona com n ímpar. Ex. $n = 5$



Passeios, Trilhas, Caminhos e Circuitos

Artigo Interessante: J. Edmonds. Paths, Trees, and Flowers. Canadian Journal of Math. Num.17. 1965.

Passeio (walk)

Um passeio W em G é uma seqüência finita e não vazia $W = (v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k)$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, de modo que as extremidades da aresta e_i são os vértices v_{i-1} e v_i , $1 \leq i \leq k$

Os vértices v_0 e v_k são a origem e o termino do passeio, respectivamente.

Os vértices $v_1, \dots, v_{k-1}$ são ditos internos do passeio que tem **tamanho K**

Para grafos simples, $v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$ é determinado pela seqüência de vértices $v_0 v_1 \dots v_k$

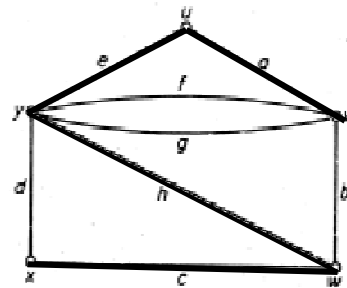
Trilha (Trail)

Passeio onde as arestas $e_1, \dots, e_k$ são duas a duas distintas.

Nesse caso o tamanho de uma trilha = $\varepsilon(W)$, o número de arestas de W .

Caminho (Path)

Quando, além das arestas, os vértices $v_0, v_1, \dots, v_k$, são dois a dois distintos.



Walk: uavfyfvgyhwbv
Trail: wcxdyhwbvgv
Path: xcwhyeuav

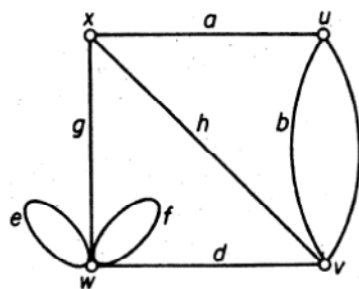
Ref [1]

Figure 1.8

Passeio: uavfyfvgyhwbv
Trilha: wcxdyhwbvgv
Caminho: xcwhyeuav

Um passeio não degenerado é fechado se o vértice inicial for igual ao final
Uma trilha fechada onde os vértices internos são 2 a 2 distintos, chama-se **Circuito**.

Circuito: xdyhwcx



Closed trail: ucvhxgfwfwdvbu
Cycle: xaubvvhx

Figure 1.10

Exemplo de trilha fechada de circuito (ou ciclo) – ref [1]

Exercício: **Provar o seguinte teorema**

Teorema: G conexo é bipartide sse G não possui circuitos de tamanho impar

Exercício: **Provar o seguinte teorema**

Teorema: G é bipartite sse G não possui circuitos de tamanho ímpar

Demonstração:

1) necessidade: G biparticionável $\rightarrow G$ não tem circuitos ímpar

Seja $v_1, \dots, v_k, v_1$ um ciclo qualquer de comprimento k do grafo biparticionável G e seja $v_1 \in V_1$ (onde V_1 e V_2 são partições de V).

Logo $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$ Como $(v_k, v_1) \in E$ (arestas de G), então $v_k \in V_2$ (senão, não seria biparticionável). Portanto, k é par.

Falta provar a suficiência, i.e., **G não tem circuitos ímpar $\rightarrow G$ é biparticionável.**

Considere V_1 e V_2 construídos da seguinte forma:

Por suposição todo circuito de G é par.

Seja v_1 um vértice qualquer de V e $V_1 = \{\text{conjunto de vértices com distância par de } v_1\}$

$V_2 = V - V_1$

Nota: se houvesse circuito ímpar, pelo menos dois adjacentes estariam na mesma partição

Agora temos V_1 e V_2 , construídos a partir da suposição que todo circuito é par. Observem que por definição V_1 e V_2 incluem todos os vértices de G (conexo)

Vamos provar que de fato V_1 e V_2 formam um grafo bipartite.

Prova por contradição ...

Suponha por absurdo que temos V_1 e V_2 , mas que G não é particionável.

Nesse caso, portanto, ou existe uma aresta $\alpha(a, b)$ in V_1 ou existe uma aresta $\alpha(a, b)$ in V_2 (in=pertence) ou em ambas as partições.

Assumamos que existe uma aresta $\alpha(a, b)$ in V_1

Considere os caminhos mais curtos de v_1 para a e v_1 para b .

Então, por escolha de a e b (in V_1), os caminhos acima são pares.

Se os caminhos $(v_1, \dots, a)$ e $(v_1, \dots, b)$ são disjuntos (exceto pelo vértice v_1), então o circuito $(v_1, \dots, a, \alpha, b, \dots, v_1)$ tem comprimento ímpar (contradição).

Caso haja intersecção de $v_1, \dots, y$, os caminhos disjuntos $(y, \dots, a)$ e $(y, \dots, b)$ terão a mesma paridade (já que os caminhos a partir de v_1 são pares). Portanto, o circuito $(y, \dots, a, \alpha, b, \dots, y)$ tem comprimento ímpar (contradição).

O caso é análogo para uma aresta $\alpha(a, b)$ in V_2 (verifiquem em casa)

Exercícios

- 1) Dê um exemplo de um grafo simples não biparticionável, que não seja um triângulo e de menor tamanho possível
- 2) Mostre, usando grafos, que cada conjunto de seis pessoas contém (pelo menos) três que são mutuamente conhecidos ou três que são mutuamente desconhecidos.