

Doutorado em Ciência da Computação

Algoritmos e Grafos

Raimundo Macêdo
LaSiD/DCC/UFBA

Grafo Completo

Grafo simples cujos vértices são dois a dois adjacentes.
Usa-se a notação K_n para um grafo completo com n vértices

Um n -cubo, $n \geq 1$, é um grafo simples cujos vértices são as n -uplas ordenadas sobre o conjunto $\{0,1\}$ e no qual dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma coordenada. Ex: (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111)

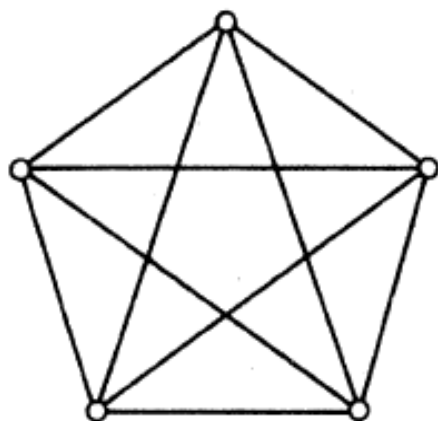
Grafos Complementares

G e H são complementares se ambos são simples, com $V(G) = V(H)$, de modo
Quaisquer dois vértices distintos são adjacentes em G se e somente se não o foram em H

Um par de conjuntos de vértices (X,Y) é uma **Bipartição** de um grafo G se

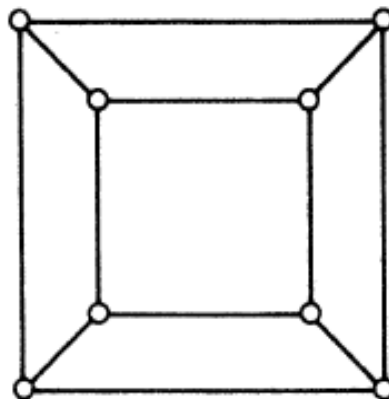
- i) $V(G) = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$
- ii) Cada aresta de G tem um extremo em X e o outro em Y

Um grafo é **biparticionável** ou **bipartide** se tiver um bipartição



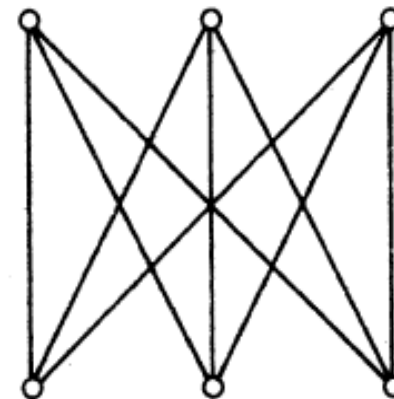
(a)

Completo K_5



(b)

3-cubo



(c)

$K_{3,3}$

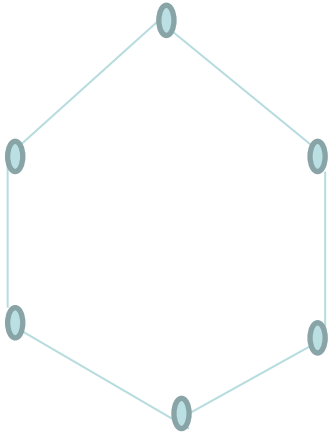
Figure 1.4. (a) K_5 ; (b) the cube; (c) $K_{3,3}$

Um grafo **bipartide completo** tem uma bipartição (X,Y) na qual cada vértice de X é ligado a cada vértice de Y . Se $m = |X|$ e $n = |Y|$, denotamos $K_{m,n}$

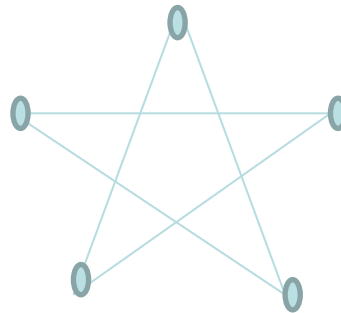
Exercício sala:

1. Mostre que o grafo da fig (b) acima é bipartide
2. Por que esse grafo não é um $K_{3,3}$?

Um grafo simples é chamado auto-complementar se o mesmo é isomórfico a seu próprio complemento



a



b

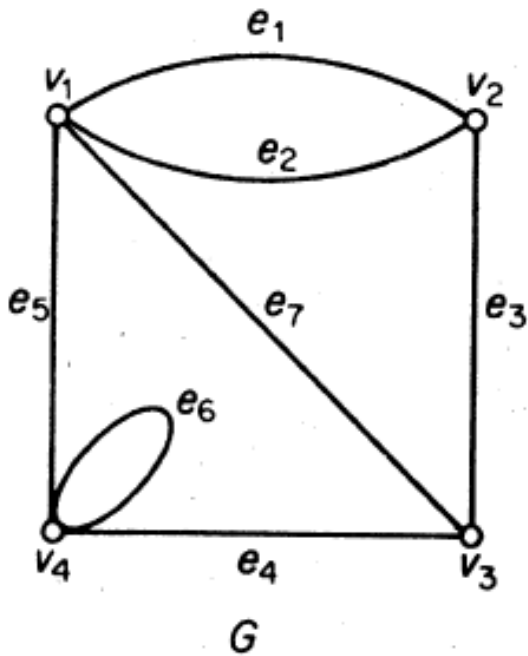


c

- 1) Qual desses é auto-complementar?
- 2) Prove que se G é auto-complementar com n vértices, então ou $n = 4t$ ou $n = 4t+1$ para algum inteiro t (Dica: considere o número de arestas no K_n)

Estruturas de Dados para representar Grafos

Formas de representar $V(G)$, $E(G)$ e a função de incidência



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

$M(G)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	1	0	1	1

$A(G)$

Matriz de Incidência

Número de vezes (0, 1 ou 2)
 v_i e a_j são incidentes

Matriz de Adjacência

Número de arestas
juntando dois vértices

Exercício sala:

1. Qual das duas representações é mais compacta?
2. Qual das duas representações melhor expressa um grafo?
3. Seja M e A as matrizes de incidência e adjacência de um grafo, G , respectivamente.
 - i. Mostre que a soma de cada coluna de M é 2
 - ii. Qual são as somas das colunas de A ?
4. Seja G um grafo bipartido, mostre que os vértices de G podem ser enumerados de modo que a matriz de adjacência de G tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Outras representações

Pode-se também utilizar Vetor de Vértices Incidências, onde a j -ésima posição é um par (u,v) onde u e v são os extremos da aresta j

Pode-se usar também Vetor de Arestas Incidentes onde a j -ésima posição é a lista de arestas incidentes ao vértice j

SUBGRAFOS E SUB-GRAFOS GERADORES (SPANNING)

Um grafo H é um subgrafo de outro grafo G ($H \subseteq G$) se $V(G)$ inclui $V(H)$, $E(G)$ inclui $E(H)$ e para toda aresta de H , seus extremos em H são também Seus extremos em G .

Quando $H \subseteq G$, mas $H \neq G$, escrevemos $H \subset G$ e dizemos que H é um sub-grafo próprio de G

Um *spanning sub-graph* (sub-grafo gerador) de G é um sub-grafo H de G onde $V(H) = V(G)$

Se removermos de G todos os laços e arestas redundantes, obtemos um sub-grafo simples gerador de G (figura abaixo)

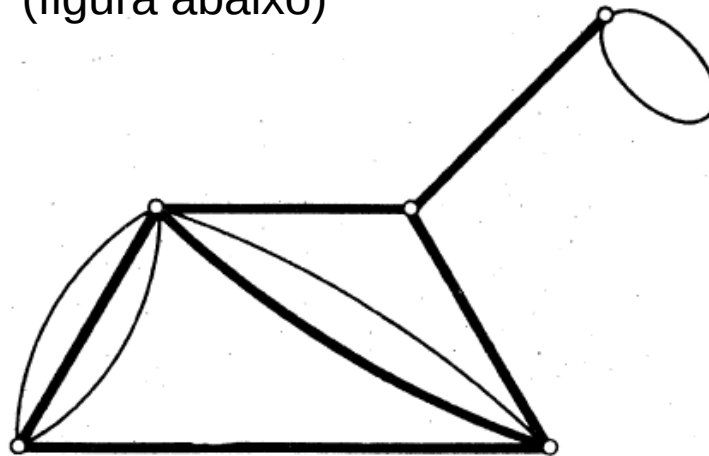


Figure 1.6. A graph and its underlying simple graph

SUBGRAFOS E SUB-GRAFOS GERADORES (SPANNING)

Um *spanning sub-graph* (sub-grafo gerador) de G é um sub-grafo H de G onde $V(H) = V(G)$

1.4 SUBGRAPHS

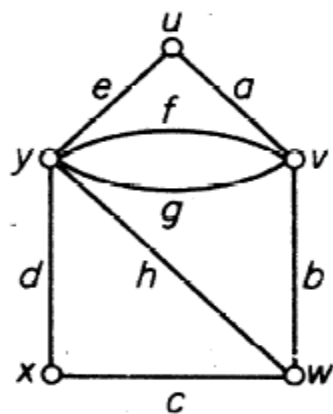
A graph H is a *subgraph* of G (written $H \subseteq G$) if $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, and ψ_H is the restriction of ψ_G to $E(H)$. When $H \subseteq G$ but $H \neq G$, we write $H \subset G$ and call H a *proper subgraph* of G . If H is a subgraph of G , G is a *supergraph* of H . A *spanning subgraph* (or *spanning supergraph*) of G is a subgraph (or supergraph) H with $V(H) = V(G)$.

By deleting from G all loops and, for every pair of adjacent vertices, all but one link joining them, we obtain a simple spanning subgraph of G , called the *underlying simple graph* of G . Figure 1.6 shows a graph and its underlying simple graph.

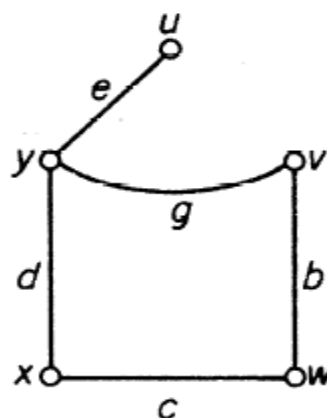
Def. Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo gerador conexo e acíclico de G .

Fato: Todo grafo conexo possui uma árvore geradora. A idéia para verificar isto é ir retirando as arestas uma a uma de modo a manter o grafo conexo. Quando isto não for mais possível, as arestas remanescentes formam uma árvore geradora.

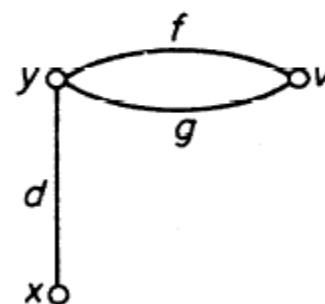
Graphs and Subgraphs



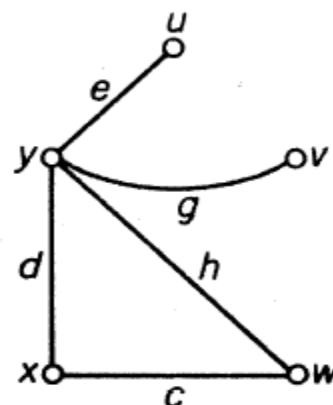
G



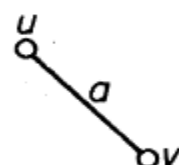
A spanning subgraph of G



$G - \{u, w\}$

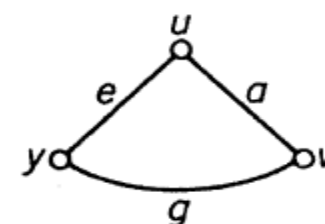


$G - \{a, b, f\}$



$x \circ$

The induced subgraph $G[\{u, v, x\}]$



$x \circ \quad \quad \quad x \circ \quad \quad \quad x \circ$

The edge-induced subgraph $G[\{a, c, e, g\}]$

Figure 1.7

Exercício para Casa

Demonstrar:

- 1) Em todo grafo G simples com n vértices ($n > 1$), existem pelo menos dois Vértices com o mesmo número de arestas incidentes
- 2) Para cada número par n , $n > 3$, existe um grafo 3-regular (grau 3 em todos os vértices) com n vértices